統計多様体におけるホップ・リノウの定理

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
上野龍 (Ryu UENO) *

概要

連結リーマン多様体のレヴィチヴィタ接続に対して, 測地的完備であれば測地的連結であるというホップ・リノウの定理がある．この性質は一般のアファイン接続に対しては成り立たない. あるクラスの統計多様体においては, 統計多様体のアファイン接続に対してホップ・リノウの定理が成り立つことを紹介する.

1　統計多様体と測地的連結性

統計多様体 (M, g, ∇) とはコダッチの方程式を満たしている, リーマン計量 g と捩れのないアファイン接続 ∇ の組が与えられた多様体 M である．この用語は情報幾何学に起源を持つが, 既にアファイン微分幾何学において研究されていた対象である [6].

連結多様体 M 上にアファイン接続 ∇ が与えられているとする．任意の 2 点 $p, q \in M$ に対して $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ を満たす ∇-測地線 $\gamma : [0, 1] \to M$ が存在するとき，∇ は**測地的連結**であるという．リーマン幾何学では連結リーマン多様体 (M, g) のレヴィチヴィタ接続 ∇^g が測地的完備であれば測地的連結であるというホップ・リノウの定理がある．一般のアファイン接続に対してこの定理は成り立たず, 例 4.2 で確認できるように擬リーマン多様体のレヴィチヴィタ接続に対しても反例が見つかっている．また，コンパクト多様体上の測地的完備であるアファイン接続であっても測地的連結であるとは限らない [1]. **あるクラスの統計多様体に対してアファイン接続が測地的完備であれば測地的連結である**という性質を報告する．この講演は [4] に基づく．

2　統計多様体

定義 2.1. 滑らかな多様体 M 上にリーマン計量 g と捩れのないないアファイン接続 ∇ が与えられているとする．3 次形式 $C = \nabla g$ が対称であるとき，(g, ∇) を統計構造，(M, g, ∇) を統計多様体と呼ぶ.

定義 2.2. 統計多様体 (M, g, ∇) に対して，(g, ∇) の**共役接続** $\overline{\nabla}$ を次で定める：

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X Z), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

共役接続は情報幾何学では双対接続とも呼ばれる．統計多様体 (M, g, ∇) とその共役接続 $\overline{\nabla}$ に対

* ueno.ryu.g1@elms.hokudai.ac.jp

して $\overline{\nabla}g = -\nabla g$ が成り立つため，$(g, \overline{\nabla})$ も M 上の統計構造である．

例 2.3. 超曲面はめ込み $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ と横断的ベクトル場 ξ，すなわち各点 $x \in M$ に対して分解 $T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+1} = f_* T_x M \oplus \mathbb{R}\xi_x$ が成り立つものの組 $\{f, \xi\}$ を**アファインはめ込み**という．実数空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な平坦接続を D とする．Gauss の公式と Weingarten の公式によって，対称テンソル場 g, 捩率が 0 であるアファイン接続 ∇，$(1,1)$ 型テンソル場 S, そして 1 次微分形式 τ が M 上に誘導される：

$$D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + g(X,Y)\xi, \quad X, Y \in \Gamma(TM), \tag{Guass}$$

$$D_X \xi = -f_* SX + \tau(X)\xi, \quad X \in \Gamma(TM). \tag{Weingarten}$$

ここで，τ が 0 であるとき，$\{f, \xi\}$ を等積アファインはめ込みと呼ぶ．これは ∇g の対称性と同値である．そして g が定値であるとき，f は局所強凸であるという．この性質は ξ の取り方によらない．以上の設定の元で，アファインはめ込みによって統計多様体 (M, g, ∇) が誘導される．

アファイン微分幾何学において最も基本的である超曲面は 2 次超曲面である，すなわち，$(n+1)$ 次対称行列 $Q \neq 0$, $P \in \mathbb{R}^{n+1}$, $R \in \mathbb{R}$ に対して

$$yQy^t + Py^t + R = 0$$

を満たす $y = (y^1, ..., y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 全体による集合である．特に局所強凸である 2 次超曲面は楕円放物面，楕円面，二葉双曲面である．局所強凸 2 次超曲面上の統計構造は以下で特徴づけられる．

定理 2.4 ([6])**.** 局所強凸等積アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ によって誘導される統計多様体を (M, g, ∇) とする．超曲面はめ込み f の像がある 2 次超曲面上に乗っているための必要十分条件は，ある関数 $\varphi \in C^\infty(M)$ があって 3 次形式 $C = \nabla g$ について以下が成り立つことである：

$$C(X,Y,Z) = d\varphi(X)g(Y,Z) + d\varphi(Y)g(Z,X) + d\varphi(Z)g(X,Y), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM). \tag{1}$$

この特徴付けによって統計多様体のクラスを新たに定める．

定義 2.5. 統計多様体 (M, g, ∇) の 3 次形式 $C = \nabla g$ が (1) を満たすとき，統計多様体は**割り切れる 3 次形式を持つ**という．

3　アファイン接続の測地的完備性

多様体上のアファイン接続は多様体上の直線にあたる，測地線を定める．

定義 3.1. 多様体 M にアファイン接続 ∇ が与えられているとする．次式を満たす M 上の滑らかな曲線 $\gamma : I \to M$ を ∇-**測地線**と呼ぶ：

$$(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)(t) = 0, \quad t \in I.$$

ここで，$\dot\gamma$ は曲線 γ の速度ベクトルである．任意の $(p, v) \in TM$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$ を満たす ∇-測地線 $\gamma : \mathbb{R} \to M$ が存在するとき，∇ は**測地的完備**であるという．

リーマン多様体 (M, g) 上一意に定まるレヴィチヴィタ接続 ∇^g による測地線は局所的に 2 点間の最短曲線として特徴づけられる．リーマン計量 g によって誘導される距離 d によって (M, d) が完備距離空間であることと，∇^g が測地的完備であることは同値である．

割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体においては，アファイン接続の完備性を次で求めることができる．

命題 3.2 ([2])**.** 統計多様体 (M, g, ∇) の 3 次形式 C に対して $C = \mathrm{sym}(d\varphi \otimes g)$ が成り立つとする．このとき，∇^g が測地的完備，関数 φ が M 上で上に有界であるとき，∇ は測地的完備である．

4　アファイン接続の測地的連結性

連結多様体 M にアファイン接続 ∇ が与えられているとする．多様体 M の任意の 2 点が ∇-測地線で結ばれるとき，$\nabla(= (M, \nabla))$ を測地的連結という．

命題 4.1 (ホップ・リノウの定理)**.** 連結リーマン多様体 (M, g) のレヴィチヴィタ接続 ∇^g が測地的完備であれば測地的連結である．

ホップ・リノウの定理は一般のアファイン接続に対して成り立たない．

例 4.2. (ドゥ・ジッター空間 [5]) 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の通常の基底 $e_1, ..., e_{n+1}$ に対してローレンツ内積

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \leq n \\ -1 & , i = j = n+1 \end{cases}$$

を与えたとき，これをローレンツ空間と呼び L^{n+1} で表す．半径 $r > 0$ のドゥ・ジッター空間 $S_1^n(r)$ を

$$S_1^n(r) = \{y \in L^{n+1} \mid \langle y, y \rangle = r^2\}$$

によって定め，包含写像 $i : S_1^n(r) \hookrightarrow L$ によってローレンツ計量 $g = i^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $S_1^n(r)$ 上に定める．このとき，g のレヴィチヴィタ接続 ∇^g は測地的完備であるが，測地的連結ではない．

5　割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体

割り切れる統計多様体は良い性質を多く持つ．

命題 5.1 ([4])**.** 統計多様体 (M, g, ∇) の 3 次形式 C に対して $C = \mathrm{sym}(d\varphi \otimes g)$ が成り立つとする．このとき，ω_g をリーマン計量 g による M 上の体積形式とすれば，$\theta = \exp(-\frac{n+2}{2}\varphi)\omega_g$ は ∇ に関して平行である体積形式である．

一般の統計多様体 (M, g, ∇) に対して, 必ずしもアファイン接続 ∇ に関して平行である体積形式が存在するとは限らないことに注意する．

定義 5.2. 多様体 M 上に 2 つのアファイン接続 ∇, $\tilde{\nabla}$ が与えられているとする．ある閉 1 次微分形式 ρ が存在して

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \rho(X)Y + \rho(Y)X, \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

が成り立つとき，∇, $\tilde{\nabla}$ は射影的に同値であるという．

アファイン接続 ∇, $\tilde{\nabla}$ が射影的に同値であるとき，∇-測地線 γ はパラメータ変換を行うことで $\tilde{\nabla}$-測地線 $\tilde{\gamma}$ にすることができる [6].

命題 5.3 ([4]). 統計多様体 (M, g, ∇) の 3 次形式に対して $\nabla g = \mathrm{sym}(d\varphi \otimes g)$ が成り立つとする．このとき，リーマン計量 $\tilde{g} = \exp(\varphi)g$ のレヴィチヴィタ接続 $\nabla^{\tilde{g}}$ と ∇ は射影的に同値である．

従って，命題 5.3 の設定においてはアファイン接続 ∇ の測地線を調べるとき，$\nabla^{\tilde{g}}$ の測地線を調べればよい．当然，$\nabla^{\tilde{g}}$ にはホップ・リノウの定理が成り立つ．

6 主定理

今までの準備の元で，次の定理が得られた．

定理 6.1 ([4]). 統計多様体 (M, g, ∇) の 3 次形式 C に対して $C = \mathrm{sym}(d\varphi \otimes g)$ が成り立つとする．アファイン接続 ∇, (g, ∇) の共役接続 $\overline{\nabla}$, リーマン計量 $\tilde{g} = \exp(\varphi)g$ のレヴィチヴィタ接続 $\nabla^{\tilde{g}}$ について，以下が成り立つ．

(1) ∇ が測地的完備であり φ が下に有界であるとき, $\nabla^{\tilde{g}}$ は測地的完備である．
(2) $\nabla^{\tilde{g}}$ が測地的完備であり φ が上に有界であるとき, ∇ は測地的完備である．
(3) ∇ が測地的完備であり φ が下に有界であるとき, $\overline{\nabla}$ は測地的完備である．
(4) $\nabla^{\tilde{g}}$ が測地的完備であり φ が下に有界であるとき, $\overline{\nabla}$ は測地的完備である．
(5) ∇ と $\nabla^{\tilde{g}}$，それぞれの測地的連結性は同値である．

系 6.2 ([4]). 連結コンパクト統計多様体 (M, g, ∇) の 3 次形式 C に対して $C = \mathrm{sym}(d\varphi \otimes g)$ が成り立つとき，∇ は測地的連結である．

例 6.3. 楕円面 $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ に対して，$\{f, \xi\}$ が等積アファインはめ込みとなる横断的ベクトル場 ξ を一つとる．このとき，M は球面と同相である [6]．従って，$\{f, \xi\}$ によって誘導される M 上の統計構造 (g, ∇) において，∇ は命題 3.2 により測地的完備であり，定理 6.1 により測地的に連結である．

例 6.4. 楕円面に乗る曲面

$$f(x^1, x^2) = \frac{1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}\left(-2x^1, -2x^2, 1\right) \in \mathbb{R}^3, \quad (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$$

に対して，横断的ベクトル場を位置ベクトル $-f$ とする．このとき，Gauss の公式によって $\mathbb{R}^2$ 上に統計構造 (g, ∇) が誘導される：

$$g = \frac{2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2\right)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = -\frac{2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}\left(x^i \frac{\partial}{\partial x^j} + x^j \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

ここで，$\varphi(x^1, x^2) = \log(\frac{1}{2}((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1))$ とおけば，$\nabla g = \mathrm{sym}(d\varphi \otimes g)$ が成り立つ．リーマン計量 $\tilde{g} = \exp(\varphi) g$ は $\mathbb{R}^2$ におけるユークリッド計量であるため，そのレヴィチヴィタ接続 $\nabla^{\tilde{g}}$ は測地的完備である．従って，定理 6.1 より ∇ は測地的連結である．ここで，∇ は測地的完備ではない．

そして，定理 6.1 を用いて割り切れる 3 次形式 C を持つ統計多様体版のホップ・リノウの定理が得られる．

定理 6.5 ([4]). 連結な統計多様体 (M, g, ∇) が割り切れる 3 次形式 $C = \mathrm{sym}(d\varphi \otimes g)$ を持つとし，関数 φ は M 上で下に有界であるとする．このとき，

(1) ∇ が測地的完備であるとき, ∇ は測地的連結である.

(2) ∇^g が測地的完備であるとき, ∇ は測地的連結である.

参考文献

[1] L. Bates, You can't get there from here. Differential Geom. Appl. **8** (1998), no.3, 273-274.

[2] M. Noguchi, Geometry of statistical manifolds, Differential Geom. Appl. **2**(1992), no.3, 197-222.

[3] K. Nomizu, U. Pinkall, Cubic form theorem for affine immersions, Results Math. **13**(1988), no.3-4, 338–362.

[4] R. Ueno, Geodesic Connectedness on Statistical Manifolds with Divisible Cubic Forms, arxiv.org/abs/2503.10024.

[5] 野水克己，現代微分幾何入門，裳華房，1981.

[6] 野水克己, 佐々木武, アファイン微分幾何学, 裳華房, 1994.